Évariste GALOIS : DE HEGEL À GROTHENDIECK.

Penser ? Abstrait ? Sauve qui peut ! *J'entends déjà s'écrier ainsi un félon acheté par l'ennemi afin de dénoncer cet essai parce qu'on y parlerait de métaphysique. Car « métaphysique », ainsi qu'« abstrait » et, à peu de choses près aussi, « penser », est le mot devant lequel chacun plus ou moins fuit, comme on détale devant un pestiféré.*

G. W. F. HEGEL, *Qui pense abstrait ?* (1807)[1].

Je sais bien que Hegel a dit que le concret était l'abstrait et que l'abstrait était le concret. Mais aussi cet homme pensif a mis votre science à l'envers.

Anatole FRANCE, *Le Jardin d'Épicure* (1921)[2]

Bibliographie :

– Baptiste MÉLÈS, « Pratique mathématique et lectures de Hegel, de Jean Cavaillès à William Lawvere » [https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01224100/document] ;

– Julien PAGE, « Introduction à une théorie conceptuelle des théories de Galois », *Intelligere*, Revista de História Intelectual, Vol. II, n. 1 [2], 2016.

(CLIC)

« [...] il est remarquable que personne ne se soit vraiment préoccupé du langage de Galois, de cette langue du savant dont Lavoisier a dit qu'elle est une véritable méthode »

André DALMAS, *op. cit.*, p. 18.

---

1. *Wer denkt abstract ?*, in D. Friedrich Förster, D. Ludwig Boumann [Herausgegebner], *Georg Wilhelm Friedrich Hegel's Werke*, Vollständige Ausgabe durch einen Verein von Freunden des Verewigten, Bd. 17, *Vermischte Schriften*, Berlin, Verlag von Duncker und Humblot, 1835. *Qui pense abstrait ?*, Paris, Hermann, « Philosophie », traduction française inédite et commentaire par Ari Simhon, 2007. « Sauve qui peut ! » est en français dans le texte.

2. Anatole France, *Le jardin d'Épicure*, Paris, Calman-Lévy, 1929, « Ariste et Polyphile ou le langage métaphysique », p. 220.

Voici maintenant une phrase clé, comme le « chiffre » du génie galoisien :

(CLIC)

« L'extraordinaire génie d'Évariste Galois n'a pas encore conquis la place qui lui est due. *Il nous reste à découvrir celui qui fut le philosophe du mathématicien qu'il était.* On ne comprendra pas la puissance de l'un tant qu'on ignorera l'autre »

Bourgne, *Avertissement* à Robert BOURGNE & Jean-Pierre AZRA, *Écrits et mémoires mathématiques*, Paris, Gauthier-Villars, Édition critique intégrale des manuscrits et publications d'Évariste Galois, 1962, p. XIII.

Non moins essentielle et signifiante, cette déclaration de Jules Tannery en 1903, déclaration « inactuelle », tant elle touche aujourd'hui même la tâche et l'éthique du mathématicien :

(CLIC)

« Les travaux comme ceux de Galois sont regardés comme inutiles *par les philosophes à vue courte*, qui ne veulent regarder dans la science que ses applications immédiates : ces applications ne sont possibles que parce que nous connaissons mieux le monde au milieu duquel nous vivons ; seules, les mathématiques peuvent mettre dans notre connaissance l'ordre et l'enchaînement ; elles ont elles-mêmes un ordre et un enchaînement logique qui leur sont propres, et qu'il faut découvrir en ne s'attachant qu'à elles. Ceux qui en sont capables seront toujours rares »

Déclaration de Jules Tannery en 1903, dans Préface à *La Vie d'Évariste Galois* de Dupuy, 1903, p. 6.

C'est précisément pour échapper à ce jugement sur les « *philosophes à vue courte* », d'une brûlante actualité, que tout philosophe se devrait de considérer le seul écrit spécifiquement dédié à cette discipline qu'est la *dissertation philosophique* de Galois.

Ma seconde remarque est qu'une simple lecture de sa dissertation témoigne de ce que la copie du candidat Galois est ***une authentique copie de philosophie***. Mais il y a plus, et nous allons voir en quoi.

En 1829, Galois est *déjà* un mathématicien hors norme, qui réfléchit en mathématicien créatif sur les principes de sa discipline : il est en effet en train de déplacer radicalement l'angle d'attaque, tant *en mathématique* (algèbre, calcul infinitésimal, théorie des nombres…) qu'*en philosophie* (lieu d'expression conceptuelle des principes comme de la méthode nouvelle).

Dans les écrits de Galois, je considère comme *fondamentalement philosophiques*, tant sa correspondance avec son ami Auguste Chevalier, que ce qui a été publié par André Dalmas sous le titre de *Textes d'Évariste Galois*, dans *Évariste Galois. Révolutionnaire et Géomètre*, paru en 1956.

Bien plus, je rapprocherai la pensée *philosophique* de Galois de la dialectique spéculative de Hegel.

A) De Hegel à Galois. C'est le statut du *problème*, du *théorème* et de la *preuve* qui est discuté ici. Pour Hegel, le propre du *théorème* est de rapporter *le divers* de l'objet à *l'intériorité* du concept. Dès que sont en jeu toutes les relations de l'objet et non simplement quelques-unes d'entre elles, il y a *conjonction* entre cette force conceptuelle et l'objet total tel que visé par la définition. Ce concept qui *pénètre* l'intégralité du réel n'est autre que l'*Idée* que Hegel appelle « définition seconde » (« Le moi pénètre l'objet *en pensant* », *Science de la logique*, op. cit., p. 46, traduction modifiée)[3]. La *définition* comme telle se meut dans l'homogène et elle n'est complète qu'à prendre en compte, au plan descriptif, la totalité des déterminations extérieures constitutives de la chose. Le risque majeur pour la géométrie est une baisse de tension spéculative lorsque ce qui, dans un théorème, est normalement à prouver, se trouve pris selon l'ordre d'une évidence immédiate, et ressortit par conséquent à l'économie de la définition.

Le *chiffre* de cette dialectique trouve son noyau explicatif et son déploiement dans la prise en vue de l'*arithmétique* et de l'*algèbre*. L'*arithmétique* ne déroge pas aux insuffisances de la géométrie : « L'acte-d'intuitionner les […] nombres n'apporte pas l'aide à la science de ces mêmes [nombres] ; c'est seulement l'*acte-de-penser* à leur propos qui permet de produire au jour une telle [science] » (*Science de la logique*, Tome II, op. cit., p. 82).[4].

> « Le procédé des maîtres-en-calcul, qui donnent également une multitude de règles à propos des opérations arithmétiques, [règles] qui toutes présupposent que l'on n'a pas le *concepts* de l'opération. — Mais les nombres sont un matériau dépourvu-de-concept (*begrifflos*), l'opération-de-calcul (*Rechenoperation*) est un saisir-ensemble (*zusammenfassen*) ou [un] séparer extérieurs, un procédé mécanique, au point que l'on a découvert des machines-à-calculer (Rechen-Maschinen) qui accomplissent ces opérations » (*Ibidem*, p. 180)[5].

---

[3]. « Le moi pénètre l'objet *en pensant* », *Science de la logique*, op. cit., p. 46, traduction modifiée. Sur ce thème de la *pénétration*, voir le beau livre de Jean-Luc Nancy, *Hegel. L'inquiétude du négatif*, Paris, Hachette, « coup double », 1997, « Pénétration », p. 21-26. « – et ce n'est pas une pénétration "en pensée", abstraite ou imaginaire. Ce n'est pas une pénétration représentée, et qui resterait devant celui qui pénètre, comme son ouvrage. Celui qui pénètre est lui-même pénétré, car la pensée est la pensée de l'être lui-même, et non "la mienne" », p. 25-26.

[4]. *Science de la logique*, Tome II, op. cit., p. 82.

[5]. *Ibidem*, p. 180.

Quant à l'*algèbre*, elle ne se tire *apparemment* guère mieux de cette pure extériorité à soi-même et du défaut de *penser*. « Le grand Euler [...], [et] de façon particulière Lambert, à l'entendement sec » (*Ibid.*, p. 89) n'ont rapport qu'à la recherche *calculatoire* de la relation des déterminations-de-concept par tentative de simple *désignation* et de détermination *fixe*[6] :

> « Il est vain de vouloir tenir fermement [le concept] par des [...] signes algébriques au service de l'*œil extérieur* et d'un *type-de-traitement mécanique dépourvu de concept*, d'un *calcul* » (*Ibid.*, p. 91)[7]. Toute détermination et liaison y est quelque chose d'extérieur : « Un tel [terme] [y] est le principe de la grandeur discrète, le *Un*. Cet atome dépourvu-de-relation peut se trouver augmenté jusqu'à une *multiplicité* [...] ; cet augmenter et [ce] limiter est un progresser et déterminer vide, qui en reste à ce même principe du Un abstrait » (*Ibid.*, p. 324).

On confrontera sur ce point nodal la position d'Alain Badiou (CLIC) dans *L'être et l'événement*, Paris, Seuil, « L'ordre philosophique », *Méditation 15. Hegel* : « La répétition de l'Un dans le nombre ne se laisse pas relever par l'intériorité du négatif », p. 190.

Relations et opérations répondent encore à la logique *analytique* du calcul mécanique de l'*un-à-la-suite-de-l'autre*, du *nacheinander* où le *théorème* n'est plus qu'une « identité triviale » contenant le *problème* comme *déjà résolu*.

Mais, fait remarquable, Hegel réserve un sort fort différent à ce qu'il appelle « l'analyse plus élevée » où intervient « la *relation-de-puissances* » (*Potenzenverhältnis*) dont le ressort et l'enjeu est l'opposition du statut *conceptuel* du théorème et de la notion de *problème* (*Aufgabe*), notion qui se réduit à l'*exigence* de « l'acte-de-compter-plus-avant », simple *tâche* linéaire et seul horizon de tout tâcheron purement *calculateur.*

> Dans l'analyse plus élevée, où, avec la relation-de-puissances surtout, interviennent des relations de grandeurs discrètes, [relations] qualitatives et dépendant de déterminités-conceptuelles, les problèmes et théorèmes contiennent bien, sans contredit, des déterminations synthétiques ; doivent là même se trouver prises en qualité d'intermédiaires (*Mittelglieder*) des déterminations et relations *autres* qu'[elles] ne sont *données immédiatement* par le problème ou le théorème. [...] – Le problème, par exemple trouver la somme des puissances des racines d'une équation, se trouve résolu par la considération et ensuite [la] liaison des fonctions qui sont les coefficients de l'équation des racines. La détermination, dont on s'aide ici, des fonctions des coefficients et de leur liaison n'est pas déjà exprimée dans le problème, de plus le développement est lui-même analytique. Ainsi la solution de l'équation $x^m - 1 = 0$ à l'aide du sinus, également la solution

[6]. *Ibid.*, p. 89.

[7]. *Ibid.*, p. 91.

algébrique immanente, que l'on sait trouvée par Gauss, à l'aide de la considération du *résidu* de $x^{m-1} - 1$ divisé par m, et des racines que l'on appelle primitives – une des plus importantes extensions (*Erweiterung*) de l'analyse des temps modernes – est une solution synthétique, parce que les déterminations dont on s'aide, le sinus ou la considération des résidus, ne sont pas une détermination du problème lui-même.

Hegel fait ici référence au problème des *racines primitives de l'unité* traité par Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dans la Sectio Septima. *De Aquationibus Circuli Sectiones Definientibus* de ses *Disquisitiones mathematicae* de 1805.

Le *Théorème de Gauss* est en effet d'une importance capitale car il marque l'ouverture de l'ère des mathématiques modernes dont Galois représente le plus haut point de rupture. En sortiront les notions *abstraites* de *corps* et de *corps d'extension*, implicitement utilisées par Abel et Galois (La théorie des *corps cyclotomiques*, dont le passage cité par Hegel est un des tous premiers points d'accès, marque le pont de Gauss à Galois) ; des notions qui sont au principe véritable du Théorème de Gauss :

« Si, conformément aux idées romantiques, le génie est une invention inconsciente qui produit des intuitions sans pouvoir les penser dans des concepts correspondants, les mathématiques de Gauss sont le meilleur exemple de mathématiques géniales » (Jules Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Tome Premier, Paris, Presses Universitaires de France, 1962, p. 139).

La conception hégélienne s'est, sur ce point du moins, montrée capable de recouper un projet scientifique effectif aux implications philosophiques majeures. Du côté de Hegel on s'approcherait ainsi, à travers une théorie dont on se plaît à imaginer qu'il en eût analysé le devenir, de ce qui devrait constituer la « *bonne* » *abstraction* et la « *bonne* » *formalisation* en mathématique. En un mot, on peut parier que Hegel eût été galoisien…

B) De Galois à Hegel et Grothendieck.

Sur ce point, je me réfère pour une part aux deux articles de Baptiste Mélès et de Julien Page :

– Pour Page, je renvoie à son développement d'une perspective d'épistémologie *historique* à partir d'un côté, de la filiation *Hegel – Bachelard – Cavaillès – Lautman*, et de l'autre, de la triple articulation conceptuelle des théories de Galois choisies entre 1830 et les années 2000 **CLIC** : a) les théories *heuristiques* de Galois (théorie formelle de l'ambigüité encore insuffisamment structurée, bien que présentant la « protothéorie » de l'ambigüité-monodromie sur les surfaces de Riemann) ; b) les théories *structurales* de Galois (la catharsis des hypothèses et la formalisation d'Artin de 1938) ; c) enfin les théories *catégoriques* de Galois (ou catharsis des méthodes et « conditions axiomatiques d'une théorie de Galois », in Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie – 1960-1961. Revêtements étales et groupe fondamental,* SGA 1 (Berlin, New York, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, 1971), exposé V).

Voici pour le pontage Galois versus Hegel.

CLIC

– Pour Mélès, je renvoie au développement de son article dont la table des matières est suffisamment parlante : 1) De Cavaillès à la théorie des catégories ; 2) Lawvere et le concept d'*Aufhebung* en théorie des catégories ; 3) Hegel et la dialectique de l'être et du néant (en particulier a. Éléatisme et catégorie discrète ; b. Héraclitéisme et bicatégorie ; c. Atomisme et catégorie linéaire).

Voilà pour le pontage Hegel versus Grothendieck.

CLIC

– J'ajoute évidemment l'ouvrage cardinal de Fernando Zalamea, *Philosophie synthétique de la mathématique contemporaine (1950-2000)*.

Or, je préciserai ici que la situation *philosophique* de Galois est quelque peu analogue à celle d'Alexandre Grothendieck avec des textes comme *Récoltes et Semailles*. *Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, 1985, *La Clef des songes*, *ou dialogue avec le bon Dieu*, 1987. Les points communs entre ces deux titans des mathématiques (l'un auteur de quelques fragments décisifs et l'autre d'une profusion invraisemblable de manuscrits qui s'étale sur des dizaines de milliers de pages) sont évidents. *Nous allons bientôt voir pourquoi*.

Relance sur l'intervention de Fernando

Je rappelle que selon Galois, dans sa dissertation de philosophie, pour toutes les sciences qui sont *essentiellement* empiriques, « l'*induction* est notre unique guide ». Si ce n'est que (et c'est ici la marque de sa signature de mathématicien) Galois en écarte *une seule* discipline qui fait exception, « **une classe de vérités qu'il nous est *impossible d'en déduire* [:] […] les vérités mathématiques** ». C'est là une classe totalement à part. Dans ce champ des vérités universelles, la plus grande simplicité répond à la plus grande généralité et profondeur [**Comme le notera Bachelard un siècle plus tard, « le simple est au bout du raisonnement » (et non en son point de départ)**] : il ne s'agit donc plus d'aller du particulier au général. Ici s'impose *ab initio* le *raisonnement* le plus abstrait et *l'usage contrôlé de l'analogie entre structures* **(CLIC)** : « Il faut savoir plus gré à un Mathématicien pour une démonstration, que pour mille découvertes par *Induction* ». Comment ne pas rattacher cette vision prophétique à d'autres déclarations de Galois concernant la « reine des sciences », et ce, à peine à une ou deux années de distance ? Ce qui sera mis radicalement et philosophiquement en évidence par le mathématicien Galois, c'est la différence centrale entre *le raisonnement mathématique* portant sur la structure générique (« les caractères ») et *le calcul* : (**Sur ce point je renvoie (CLIC) aux analyses magistrales de Fernando Zalamea concernant Enrico Betti dans la séquence Grothendiek-Betti-Galois, objet de sa conférence à l'*Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti***) **(CLIC)**

(CLIC)

« *En un mot, les calculs sont impraticables* […] Il existe, en effet, […] *un certain ordre de considérations métaphysiques qui planent sur tous les calculs et qui souvent les rendent inutiles*. Je citerai, par exemple, les équations qui donnent la division des fonctions elliptiques et que le célèbre Abel a résolues. *Ce n'est certainement pas d'après leur forme numérique* que ce géomètre y est parvenu. Tout ce qui fait la beauté et à la fois la difficulté de cette théorie, c'est qu'on a sans cesse à indiquer la marche des calculs et à prévoir les résultats *sans jamais pouvoir les effectuer*. Je citerai les équations modulaires ».

Écrit en septembre 1830[8].

Galois insiste donc, *un an quasiment jour pour jour après sa dissertation de philosophie*, sur la radicale nouveauté de son approche, sa méthode nouvelle et le langage *inédit* qui permet de les exprimer : c'est là une rupture fondamentale d'avec les pratiques antérieures, tant sur la plan conceptuel qu'intuitif. Dans un autre texte célèbre, il poursuit : **(CLIC)**

---

[8]. In DALMAS, 1982, p. 110-111 [c'est nous qui soulignons].

« *Sauter à pieds joints sur les calculs, grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes*, telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage [...], mais je me suis demandé, mon livre terminé, ce qui le rendait si étrange à la plupart des lecteurs, et rentrant en moi-même, *j'ai cru observer cette tendance de mon esprit à éviter les calculs* dans les sujets que je traitais, et qui plus est, *j'ai reconnu une difficulté insurmontable à qui voudrait les effectuer généralement* dans les matières que j'ai traitées ».

De Sainte-Pélagie, septembre 1831.

Parmi ces « géomètres *futurs* », on classera sans conteste Alexandre Grothendieck.

Relance Zalamea

Galois conclut sa dissertation par ces mots **(CLIC)** :

« *Faut-il enfin juger l'induction ?* Loin de la regarder comme une méthode qui fasse honneur à l'esprit humain, elle est plutôt faite pour nous rappeler la faiblesse de notre nature. *Elle nous sert à présumer quand nous ne pouvons juger*. Nous ne saurions nous en passer ; mais *c'est un véritable pis aller* ».

Le jugement hautement négatif de Galois sur la procédure d'induction, tout à la fois marque de faiblesse de notre nature et source de présomption quand nous ne pouvons juger, *ce pis aller de la méthode*, ne pouvait satisfaire de toute évidence l'examinateur qui considère – c'est le moins qu'on puisse dire – qu'« *elle est mal appréciée dans la dernière phrase* ».

Pour conclure, nous pensons pouvoir aller plus loin. Cette idée mathématique que semble avoir à l'esprit le jeune Galois, n'est pas sans connexions avec ce que nous pourrions qualifier encore d'*induction*, mais *à l'envers* : une induction qui n'est plus cette fois conçue comme *guide* [semi-aveugle] *pour la recherche empirique*, mais une *induction métaphysique* fonctionnant sur le modèle bachelardien de l'*induction algébrique*, l'un des principes innovants du calcul tensoriel où règne l'ordre des possibles derrière son cortège d'indices (cf. *La Valeur inductive de la Relativité*, Paris, Vrin, 1929). Je n'insiste pas plus sur une analyse nécessaire du *contexte mathématique riemannien* et de ses prolongements affines chez Hermann Weyl. **Sur la place centrale de Riemann dans cette séquence, je renvoie à nouveau à la conférence vénitienne de Fernando**.

Face à l'expérience sensible plongée dans le bouillon de l'évidence du donné et dans « la nuit où toutes les vaches sont noires » (pour citer Hegel lui-même), le concept *étagé*, *feuilleté*, se construit selon un étiquetage mathématiquement réglé et une *projection conforme* des objets.

Évariste Galois avait sans doute en tête quelque chose comme une *synthèse inductive* ou cette *induction algébrique* que Bachelard définira un siècle plus tard très exactement : **(CLIC)**

« La simple transformation algébrique va nourrir les formes aux dépens les unes des autres et équilibrer leur valeur réalistique [...], affermir les cadres de la possibilité pure. [...] Réalité et possibilité vont se trouver subsumées sous une totalité d'un ordre algébrique particulièrement homogène ».

Si la théorie de la relativité générale constitue le thème des développements bachelardiens consacrés à la mathématique tensorielle, la *valeur inductive* est prise ici, chez Bachelard, *à l'envers*, **au sens où pouvait l'entendre Galois en mathématique**, c'est-à-dire au sens d'une *force d'inférence algébrique* et d'une construction : **(CLIC)**

« [L]a pensée qui l'anime se place résolument devant une tâche constructive où elle cherche les compléments, *les adjonctions* […]. Autrement dit, la nouveauté relativiste n'est pas d'essence statique ; ce ne sont pas *les choses* qui viennent nous surprendre, mais c'est *l'esprit* qui construit sa propre surprise et se prend au jeu de ses questions. ».

Rappelons que c'est Galois qui introduit le procédé d'*adjonction* en mathématiques et la notion de *quantité adjointe*. Cf. GALOIS, *Écrits et mémoires mathématiques*, 1962, p. 45.

Enfin, voici un autre texte de Bachelard, en pleine affinité avec l'attention galoisienne portée au *langage* : **(CLIC)**

« […] Les critiques portent souvent plus d'attention au mot qu'à la phrase – à la locution plus qu'à la page. Ils pratiquent un jugement essentiellement *atomique* et *statique*. Rares sont les critiques qui essaient un nouveau style en se soumettant à son *induction*. J'imagine, en effet, que de l'auteur au lecteur devrait jouer *une induction verbale* qui a bien des caractères de l'*induction électromagnétique* entre deux circuits. *Un livre serait alors un appareil d'induction psychique qui devrait provoquer chez le lecteur des tentations d'expression originale* »,

Gaston BACHELARD, « Une psychologie du langage littéraire : Jean Paulhan, “Les Fleurs de Tarbes ou la Terreur dans les lettres” », in [1970] 1988[6], p. 181.

N'est-ce point là le rêve éveillé du jeune Évariste : *induire* chez ses lecteurs l'accès à une constellation mentale inédite qui ouvre des sites mathématiques (et philosophiques) absolument nouveaux ?

En hommage à son romantisme profond, faisons lui écho de cette déclaration « littéraire » des plus galoisiennes : **(Clic)**

« Quels sont les éléments d'une forme poétique qui peuvent être impunément déformés par une métaphore, en laissant subsister une cohérence poétique [théorème fondamental de la *poésie projective*] ? [...] *La déformation des images doit alors désigner, d'une manière strictement mathématique, le groupe des métaphores* »[9].

Merci pour votre attention.

---

[9]. Bachelard, 1939, p. 70-71